$|\lambda| = 1$, es decir, $\lambda = \exp(2\sqrt{-1}\pi\theta)$, $\theta \in \mathbb{R}$. Como $z \mapsto \bar{z}$ es una simetría, las isometrías de determinante -1 son de la forma $z \mapsto \lambda\bar{z}$, con $|\lambda| = 1$. Notemos que si $\lambda \in \mathbb{C}$ es arbitrario, si bien $z \mapsto \lambda z$ no es una isometría, sí que respeta ángulos (es una homotecia compuesta con una rotación) y se dice que es una aplicación *conforme*.

Teorema 1.1.2. *Sea $f : \mathbb{R}^n \circlearrowleft$ una isometría. Entonces f es la composición de una traslación y una aplicación ortogonal.*

Demostración. Sea $\mathbf{u} := -f(\mathbf{0})$. Entonces, $g := \tau_{\mathbf{u}} \circ f$ es una isometría para la que $g(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$. Como las aplicaciones ortogonales son las isometrías lineales, basta ver que g es lineal.

Sean $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in \mathbb{R}^n$. Recordemos que

$$\langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle = \frac{\|\mathbf{v}_1\|_2^2 + \|\mathbf{v}_2\|_2^2 - \|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2\|_2^2}{2} = \frac{d(\mathbf{v}_1, \mathbf{0})^2 + d(\mathbf{v}_2, \mathbf{0})^2 - d(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)^2}{2}.$$

La condición de isometría implica que

$$\langle g(\mathbf{v}_1), g(\mathbf{v}_2) \rangle = \langle \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \rangle$$

En particular,

$$\|g(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) - g(\mathbf{v}_1) - g(\mathbf{v}_2)\|_2^2 = \|g(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2)\|_2^2 - 2\langle g(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2), g(\mathbf{v}_1) \rangle$$